Analogie et moyenne généralisée

Yves Lepage[1] **Miguel Couceiro**[2,3]

[1] IPS, université Waseda, Japon
[2] LORIA, université de Lorraine, France
[3] INESC-ID, IST, Universidade de Lisboa, Portugal
yves.lepage@waseda.jp
miguel.couceiro@loria.fr

Résumé

Nous étudions le lien entre analogie et moyennes, ou, plus exactement, moyennes généralisées. Les moyennes généralisées constituent une classe de fonctions d'agrégation définies en terme d'un seul paramètre, la puissance. En particulier, nous montrons que, quels que soient quatre nombres réels positifs, il est toujours possible de voir une analogie entre eux, grâce à une puissance bien choisie, qui est unique. Nous montrons aussi que toute analogie peut se réduire à une analogie arithmétique équivalente.

Abstract

We study the relationship between analogy and means, or, more precisely, generalized means, which are aggregation functions defined in terms of a power parameter. In particular, we show that whatever four positive real numbers are, it is always possible to establish an analogy between them by choosing a suitable power. We show that for each analogy this power is unique. In addition, we show that any analogy can be reduced to an equivalent arithmetic analogy.

1 Introduction

En intelligence artificielle, les termes d'inférence analogique ou de raisonnement analogique sont souvent utilisés. Les travaux s'y rattachant s'intéressent à l'étude des rapports entre deux couples d'éléments A et B d'une part et C et D de l'autre. Il y a plusieurs exploitations possibles d'une telle compréhension. Typiquement on peut juger si le rapport de C à D est le même que celui qui existe entre A et B. On évaluera alors la qualité de la similarité de tels rapports et l'on pourra discuter de similarité d'attributs ou de similarité de relations [32] [1] à la suite des travaux plus récents de Gentner [15]. On peut aussi voir A et C comme des problèmes, B comme une solution au problème A, et l'on se demandera si la transposition du rapport de A à B sur C permet de produire un D et dans quelle mesure ce D est une solution du problème C. C'est l'approche en raisonnement à partir de cas [3, 4, 22].

Le principe sous-jacent est celui de l'*inférence analogique* qui a été intégré dans diverses tâches d'apprentissage automatique, notamment, en apprentissage de préférences et en recommandation [13, 14, 24] et, plus généralement, en classification [11]. En outre, l'extrapolation analogique (inférence) peut résoudre des tâches de raisonnement difficiles telles que les tests d'aptitude scolaire ou de réponse à des questions visuelles [31, 27, 5] et de vérification du sens d'une phrase cible [34]. Elle peut également prendre en charge l'augmentation des ensembles de données (extension analogique et extrapolation) [9]. Cela peut également être réalisé à un méta-niveau pour un apprentissage par transfert [8, 1] où l'idée est de profiter de ce qui a été appris sur un domaine source afin d'améliorer le processus d'apprentissage dans un domaine cible lié à un domaine source. Enfin, la création d'analogies peut fournir des explications utiles qui s'appuient sur l'exemple-contre-exemple parallèle [17] et guident la génération contrefactuelle [18].

Dans certains domaines particuliers comme la traduction automatique, ce type de raisonnement analogique a été utilisé [26] et le rapprochement avec le raisonnement à partir de cas y est bien reconnu [7]. En traitement automatique des langues toujours, mais cette fois-ci par exemple pour la tâche de production de mots, une telle approche a été proposée [25] : la minimisation de la complexité algorithme du programme décrivant le rapport de A à B, c'est-à-dire la transformation de A en B, suivie de l'application du programme de complexité minimale à C, permet la production de D, c'est-à-dire d'un mot nouveau, avec des performances

1. Types de similarités déjà présentes dans l'Encyclopédie où la « raison de la dénomination commune » est soit « d'attribution » soit de « proportion » [6].

élevées sur un jeu de plusieurs millions d'analogies morphologiques en une dizaine de langues.

Mais le raisonnement analogique n'est pas exactement l'analogie. Dans la vie de tous les jours, hélas, le mot analogie prend facilement le sens de raisonnement par analogie, voire de simple comparaison, et est assez souvent lié à des raisonnements fallacieux [2]. L'analogie, dans son acception mathématique [3], n'est pas tout à fait la même chose. Le présent article traite de l'analogie mathématique. Il s'agit d'une relation sur un quadruplet qui ne privilégie pas un rapport en particulier, par exemple celui de A à B de préférence à celui de C à D, ni ne privilégie une direction particulière, par exemple celle de A à B de préférence à celle de B à A. Cette vue ne privilégie pas non plus l'un des termes de préférence aux autres, même s'ils ne sont pas tous interchangeables. Les propriétés d'interchangeabilité seront rappelées dans les sections 5.2 et 5.3. Elles ont déjà fait l'objet d'observations depuis l'antiquité en passant par l'Encyclopédie [6] pour continuer à exploiter cette référence.

Le présent article est organisé comme suit. La section 3 discute le lien entre analogies mathématiques et certaines moyennes telles que la moyenne géométrique ou la moyenne arithmétique. Ceci motive la notion de moyenne généralisée définie en terme d'un paramètre (puissance) p que nous rappelons en section 4. Munis de cette notion, nous introduisons dans la section 5 *l'analogie pour la puissance p* et étudions ses propriétés telles que la réflexivité, la symétrie et la transitivité de la conformité, ainsi que les propriétés d'interchangeabilité des termes. Nous poursuivons avec des résultats de réductions, notamment, à une forme canonique en section 6. Nous examinons l'existence du paramètre p pour un quadruplet donné dans la section 7. Nous discutons de l'unicité de p et de l'absence d'unicité dans certains cas particuliers dans les sections 7.2 et 8. L'article se termine sur des perspectives dans la section 9.

2 Notations et terminologie

Dans la suite, les lettres a, b, c et d (et même e et f là où elles sont utiles) désignent, sauf indication du contraire, des éléments de $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, autrement dit $]0; +\infty[$.

Nous utilisons les majuscules A, B, C et D lorsque nous parlons de l'analogie en général. On note classiquement une analogie par $A : B :: C : D.$ On lira le symbole :: *conformité* pour éviter les termes d'égalité ou d'identité, trop liés à une notion de relation d'équivalence. Le symbole : est celui du *rapport*. On lira *conformité en p* le symbole $::^p$ introduit plus bas.

Dans une analogie $A : B :: C : D,$ les termes A et D sont appelés les *extrêmes* et les termes B et C sont appelés les *moyens*.

3 Arrière-plan sur les moyennes et l'analogie

Nous étudions le lien entre analogie et moyennes, ou, plus exactement, moyennes généralisées.

Pour faire un rappel historique rapide sur la notion mathématique d'analogie dans l'antiquité grecque, et lier la notion à celle de moyenne, rappelons que, selon certains chercheurs (cf. [33]), le mot ἀναλογία (« encore le (même) rapport ») aurait peut-être émergé à la suite d'une période d'indécision sur la dénomination de l'analogie continue (το ἀναλογον) c'est-à-dire $A : B :: B : D$ (noter la répétition de B) et de l'analogie discrète c'est-à-dire $A : B :: C : D.$ Pour bien faire la différence, l'analogie discrète aurait même été appelée ἀνακολουθία sous le calame d'un certain Speusippe [23]. L'analogie étudiée primitivement par Euclide, qui empruntait à Eudoxe, aurait donc peut-être été plutôt l'analogie continue.

Dans l'*Éthique à Nicomaque*, Aristote répète ce fait qu'il existe deux types d'analogies appelées chacune respectivement discrète et continue, la première impliquant quatre termes, la seconde trois termes, dont l'un est répété.

> ἡ γὰρ ἀναλογία ἰσότης ἐστὶ λόγων, καὶ ἐν τέτταρσιν ἐλαχίστοις. ἡ μὲν οὖν διῃρημένη ὅτι ἐν τέτταρσιν, δῆλον. ἀλλὰ καὶ ἡ συνεχής [...] δὶς οὖν ἡ τοῦ β εἴρηται [...] ([2], 1131 a29 – 1131 b2) [4]

Dans le cas d'une analogie continue, avec la division comme rapport ou raison [5], on peut calculer b en fonction de a et d :

$$a \div b = b \div d \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = a \times d \quad \Leftrightarrow \quad b = \sqrt{a \times d}.$$

On sait que cette formule pour b est celle de la moyenne géométrique de a et d.

Si le rapport est la soustraction, on a alors, toujours pour une analogie continue :

$$a - b = b - d \quad \Leftrightarrow \quad 2 \times b = a + d \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{1}{2}(a + d)$$

On voit que b est la moyenne arithmétique de a et d.

De ce qui précède, on comprend que l'analogie continue est intimement liée à la notion de moyenne.

2. Voir dans l'Encyclopédie [6], à l'article Analogie, l'exemple des enfants nés sous le signe du Lion supposés d'humeur martiale par simple rapprochement du nom de la constellation et des attributs de l'animal : « s'imaginer que les enfans qui naissoient sous cette constellation étoient d'humeur martiale : c'est une erreur. »

3. L'Encyclopédie, encore : « Analogie, en Mathématique, est la même chose que proportion, ou égalité de rapport. Voyez Proportion, Rapport, Raison. (O) »

4. « En effet la proportion est une égalité de rapports et en quatre [termes] au moins. Et que la [proportion] disjointe soit effectivement en quatre [termes], c'est évident. Mais aussi la [proportion] continue ; [...] de sorte que si B est posée deux fois, [...] »

5. Le rapport appelé raison jusqu'à récemment (lat. *rationem* > fr. raison) désigne originellement la division. Voir la traduction du XVII^{e} siècle des Élements d'Euclide due à Henrion [12].

Analogie	Moyenne	Réécriture	$\Leftrightarrow$	Expr. de b	$\Leftrightarrow$	Formule de moyenne
$(a-b):(b-c)=a:a$	arithmétique	$(a-b):(b-c)=1$	$\Leftrightarrow$	$b=\frac{1}{2}(a+c)$	$\Leftrightarrow$	$b=\frac{1}{2}(a+c)$
$(a-b):(b-c)=a:b$	géométrique	$(ab-b^2):(ab-ac)=ab:ab$	$\Leftrightarrow$	$b^2=ac$	$\Leftrightarrow$	$\log b=\frac{1}{2}(\log a+\log c)$
$(a-b):(b-c)=a:c$	harmonique	$(ca-cb):(ab-ac)=ac:ac$	$\Leftrightarrow$	$b=\frac{2ac}{a+c}$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{b}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{c})$

TABLEAU 1 – Quelques médiétés tirées de [23]. La conformité est ici l'égalité (=) et le rapport la division (:). On obtient les trois moyennes classiques, arithmétique, géométrique et harmonique, à partir d'analogies dont les trois premiers membres sont les mêmes. Seul le quatrième terme varie et prend successivement les valeurs a, b et c.

4 Moyennes généralisées

L'étude des liens entre les différentes moyennes imaginables et l'analogie a donné lieu à des travaux par les Pythagoriciens et les mathématiciens du Moyen-Âge. Il faut citer en particulier les études sur les médiétés (gr. $\mu\varepsilon\sigma\acute{o}\tau\eta\varsigma$, lat. medietas ou mediocritas) (cf. [23]). Le tableau 1 illustre une manière, entre autres, d'extraire les trois moyennes arithmétique, géométrique et harmonique à partir d'analogies similaires, mais discrètes.

Mais la généralisation de la notion de moyenne, sans relation avec l'analogie, au-delà des seules moyennes arithmétique, géométrique ou harmonique, a été donnée en 1889 dans un article signé d'Hölder [16]. Le propos du présent article est de relier la notion mathématique d'analogie à cette généralisation de la notion de moyenne.

4.1 Définition

La moyenne généralisée de plusieurs nombres $x_1,\dots x_N$ est la valeur

$$m_p(x_1,\dots x_N) = \lim_{r\to p} \sqrt[r]{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^r}$$

pour tout $p \in]-\infty,+\infty[$. En particulier, nous retrouvons :

- la moyenne arithmétique pour $p = 1$;
- la moyenne harmonique pour $p = -1$;
- la moyenne quadratique pour $p = 2$;
- la moyenne géométrique quand p tend vers 0 car

$$m_0(x_1,\dots,x_N) = \lim_{p\to 0} m_p(x_1,\dots x_N) = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} x_i}.$$

Enfin, quand p tend vers $+\infty$, c'est le maximum des nombres, $\max(x_1,\dots x_N)$, et quand p tend vers $-\infty$, c'est le minimum des nombres, $\min(x_1,\dots x_N)$. Nous définissons $m_{+\infty}$ et $m_{-\infty}$ comme ces valeurs limites.

4.2 Spécialisation à deux nombres

La moyenne généralisée de deux nombres a et d est la valeur

$$m_p(a,d) = \lim_{r\to p} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(a^r + d^r)}$$

pour tout $p \in]-\infty,+\infty[$. La figure 1 illustre la courbe obtenue pour les valeurs particulières $a = 2$ et $d = 5$.

Il est connu que la fonction moyenne généralisée est une fonction continue et strictement croissante. Il est tentant de croire qu'elle possèderait une symétrie centrale par rapport à l'un de ses points, c'est-à-dire par rapport à une certaine valeur de p. Mais attention, en général, il n'en est rien. La figure 1 illustre ce fait.

Avant de passer aux résultats, mentionnons que, dans la suite, nous ne détaillons pas toutes les démonstrations car elles adoptent toujours la même structure. Dans le cas général où p n'est ni 0, ni infini, la limite n'est pas nécessaire, la prise de la racine p-ième non plus, le facteur un demi peut être éliminé et les démonstrations peuvent alors exploiter directement la formule $a^p + d^p$ ou bien l'égalité $a^p + d^p = b^p + c^p$. Dans le cas $p = 0$, les formules de la moyenne géométrique sont utilisées : $a\times d$ ou $a\times d = b\times c$. Enfin dans les deux cas infinis, les formules avec les min et max sont utilisées.

5 Analogie par moyennes généralisées

5.1 Définition

Sur quatre nombres réels positifs, on définit *l'analogie pour la puissance* p de la façon qui suit :

$$\begin{aligned} a:b ::^p c:d &\overset{\text{déf.}}{\Leftrightarrow} m_p(a,d) = m_p(b,c) \\ &\Leftrightarrow \lim_{r\to p}\sqrt[r]{\frac{1}{2}(a^r+d^r)} = \lim_{r\to p}\sqrt[r]{\frac{1}{2}(b^r+c^r)} \end{aligned}$$

On dira qu'il y a une analogie entre quatre nombre réels positifs a, b, c et d, si et seulement il existe un p tel que la moyenne généralisée en p des extrêmes a et d soit égale à

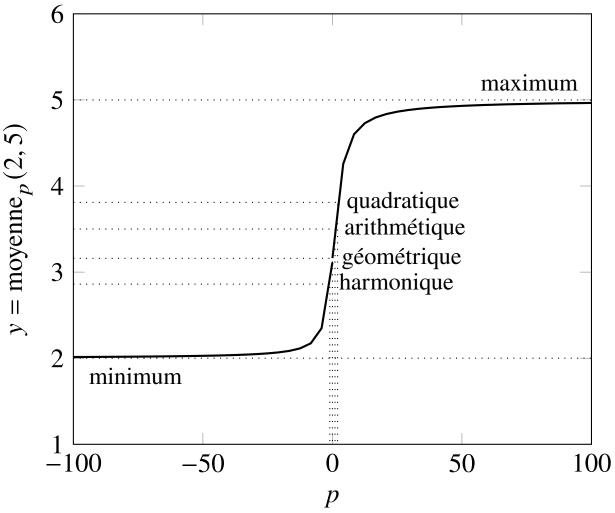

Figure 1 – Valeurs des moyennes généralisées de a et d pour $a = 2$ et $d = 5$, avec p en abscisse. On y voit les valeurs des moyennes harmonique (2,86), géométrique ($\sqrt{2 \times 5} = \sqrt{10} \simeq 3{,}16$), arithmétique (3,5) et quadratique (3,81). De même, les limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont les minimum et maximum, c'est-à-dire respectivement 2 et 5. Noter que la courbe ne possède pas de symétrie centrale par rapport à l'un de ses points.

la moyenne généralisée en p des moyens b et c. La question est de savoir premièrement à quelle condition on peut trouver un p tel que l'analogie tienne et deuxièmement de déterminer ce p.

Mais il faut d'abord vérifier que la définition donnée ci-dessus correspond bien aux idées que l'on se fait ordinairement de l'analogie mathématique. Il faut examiner si l'on a la réflexivité et la symétrie [6] pour $::^p$ et si les huit formes équivalentes de l'analogie existent bien ici.

5.2 Réflexivité, symétrie et transitivité de $::^p$

Pour la réflexivité de $::^p$, il est trivial de constater que, pour deux nombres positifs quelconques a et b, pour tout p, on a toujours

$$a : b ::^p a : b, \tag{1}$$

c'est-à-dire,

$$\lim_{r \to p} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(a^r + b^r)} = \lim_{r \to p} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(b^r + a^r)}. \tag{2}$$

Nous visualisons par des grisés le fait que, si le premier a de (1) correspond au premier a de (2), en revanche, le premier b à gauche de la conformité en p dans (1) correspond au deuxième b à droite du signe égal dans l'équation (2).

6. La transitivité n'est pas requise d'habitude pour l'analogie en général. Une simple relation de ressemblance et non d'équivalence suffit. De là notre insistance à dire conformité pour :: et non pas égalité ou identité.

La symétrie de $::^p$ s'énonce comme suit :

$$a : b ::^p c : d \quad \Leftrightarrow \quad c : d ::^p a : b.$$

Elle est vérifiée car :

$$\begin{aligned} a : b ::^p c : d &\Leftrightarrow m_p(a, d) = m_p(b, c) \\ &\Leftrightarrow m_p(b, c) = m_p(a, d) \\ &\Leftrightarrow m_p(c, b) = m_p(d, a) \\ &\Leftrightarrow c : d ::^p a : b. \end{aligned}$$

Répétons que la transitivité n'est pas nécessaire en général pour l'analogie. Il se trouve qu'elle existe pour $::^p$. Ce qui s'énonce :

$$\begin{cases} a : b :: c : d \\ c : d :: e : f \end{cases} \Rightarrow \quad a : b :: e : f. \tag{3}$$

Pour le cas général où p est dans $\mathbb{R}^*$, c'est-à-dire différent de 0, on a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} m_p(a, d) = m_p(b, c) \\ m_p(c, f) = m_p(d, e) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^p - b^p = c^p - d^p \\ c^p - d^p = e^p - f^p \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad a^p - b^p = e^p - f^p \\ &\Rightarrow \quad m_p(a, f) = m_p(b, e). \end{aligned}$$

Dans le cas où p tend vers zéro on sait que

$$m_0(a, d) = \sqrt{a \times d}.$$

On a donc facilement, à condition qu'aucun des termes ne soit nul :

$$\begin{aligned} \begin{cases} m_0(a, d) = m_0(b, c) \\ m_0(b, c) = m_0(e, f) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a/b} = \sqrt{c/d} \\ \sqrt{c/d} = \sqrt{e/f} \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad \sqrt{a/b} = \sqrt{e/f} \\ &\Leftrightarrow \quad m_0(a, f) = m_0(b, e). \end{aligned}$$

Dans le cas où p tend vers moins l'infini, on voudrait faire le raisonnement suivant qui bloque à l'endroit mentionné ci-dessous par l'absence d'implication.

$$\begin{aligned} \begin{cases} m_{-\infty}(a, d) = m_{-\infty}(b, c) \\ m_{-\infty}(c, f) = m_{-\infty}(d, e) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \min(a, d) = \min(b, c) \\ \min(c, f) = \min(d, e) \end{cases} \\ &\not\Rightarrow \quad \min(a, f) = \min(b, e) \\ &\Leftrightarrow \quad m_{-\infty}(a, f) = m_{-\infty}(b, e). \end{aligned}$$

En général on n'a pas l'implication. Mais si l'on suppose que a, b, c, d sont rangés par ordre croissant et que e et f sont supérieurs ou égaux à d, alors on peut montrer la transitivité. Il en va de même pour plus l'infini pour lequel il faudrait simplement remplacer min par max et inverser le sens des inégalités.

5.3 Huit formes équivalentes de l'analogie

Les formalisations classiques de l'analogie en mathématique autorisent huit formes d'écritures équivalentes de la même analogie en jouant sur la position des termes dans l'analogie.

$$\begin{array}{ll} a : b :: c : d & c : a :: d : b \\ a : c :: b : d & c : d :: a : b \\ b : a :: d : c & d : b :: c : a \\ b : d :: a : c & d : c :: b : a \end{array}$$

L'article Proportion de l'Encyclopédie [30] mentionne les deux plus connues : *invertendo*, l'inversion des rapports $b : a :: d : c$ et *permutando*, la permutation des moyens $a : c :: b : d$, jugée intrinsèquement caractéristique de l'analogie par les Anciens (cf. [2]). L'équivalence entre la forme originale $a : b :: c : d$ et ces deux formes implique les cinq autres. [7]

Pour ce qui est de l'analogie par moyenne généralisée, l'inversion des rapports est donnée par la symétrie de l'égalité dans $m_p(b, c) = m_p(a, d)$. La commutativité de l'addition dans $(b^p + c^p)$, de la multiplication dans $b \times c$ et dans $\min(b, c)$ ou $\max(b, c)$ donne la permutation des moyens. Les huit formes équivalentes de l'analogie sont donc bien là pour l'analogie par moyenne généralisée.

6 Réductions des analogies par moyennes généralisées

Nous allons maintenant montrer que la définition donnée en 5.1 non seulement unifie les notions classiques d'analogie arithmétique et géométrique, mais encore entraîne des équivalences entre une infinité d'analogies en puissance p. Autrement dit, il existe une forme canonique à laquelle on peut réduire toute analogie en puissance p (sauf pour $p = -\infty$ et $p = +\infty$). On peut faire le choix, par exemple, de réduire à l'analogie arithmétique.

6.1 Prise des inverses des termes

On remarque facilement que, pour une analogie en puissance p donnée, l'analogie en la puissance opposée est valable sur les inverses des termes.

$$a : b ::^p c : d \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a} : \frac{1}{b} ::^{-p} \frac{1}{c} : \frac{1}{d}$$

6.2 Cas général de la multiplication par un nombre positif

Il est facile d'observer que, pour quatre nombre réels positifs quelconques, l'analogie en p entre ces nombres peut être transformée en une autre analogie de même puissance p, entre ces mêmes nombres multipliés par un nombre positif quelconque. C'est-à-dire :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, \quad a : b ::^p c : d \;\Leftrightarrow\; \lambda a : \lambda b ::^p \lambda c : \lambda d.$$

Il est en effet facile de montrer que, d'abord dans le cas où p est différent de 0 :

$$\begin{aligned} & a : b ::^p c : d \\ \Leftrightarrow\;& \sqrt[p]{\frac{1}{2}(a^p + d^p)} = \sqrt[p]{\frac{1}{2}(b^p + c^p)} \\ \Leftrightarrow\;& \lambda \times \sqrt[p]{\frac{1}{2}(a^p + d^p)} = \lambda \times \sqrt[p]{\frac{1}{2}(b^p + c^p)} \\ \Leftrightarrow\;& \sqrt[p]{\frac{1}{2}((\lambda a)^p + (\lambda d)^p)} = \sqrt[p]{\frac{1}{2}((\lambda b)^p + (\lambda c)^p)} \\ \Leftrightarrow\;& \lambda a : \lambda b ::^p \lambda c : \lambda d. \end{aligned}$$

Dans le cas où p est égal à 0, il est aussi facile de montrer que :

$$\begin{aligned} a : b ::^0 c : d \;\Leftrightarrow\;& \sqrt{ad} = \sqrt{bc} \\ \Leftrightarrow\;& \lambda \times \sqrt{ad} = \lambda \times \sqrt{bc} \\ \Leftrightarrow\;& \sqrt{\lambda^2 ad} = \sqrt{\lambda^2 bc} \\ \Leftrightarrow\;& \sqrt{(\lambda a)(\lambda d)} = \sqrt{(\lambda b)(\lambda c)} \\ \Leftrightarrow\;& \lambda a : \lambda b ::^0 \lambda c : \lambda d. \end{aligned}$$

Dans le cas où p tend vers $-\infty$, on a :

$$\begin{aligned} a : b ::^{-\infty} c : d \;\Leftrightarrow\;& \min(a, d) = \min(b, c) \\ \Leftrightarrow\;& \min(\lambda a, \lambda d) = \min(\lambda b, \lambda c) \\ \Leftrightarrow\;& \lambda a : \lambda b ::^{-\infty} \lambda c : \lambda d. \end{aligned}$$

Et de même pour p tendant vers $+\infty$, en remplaçant min par max.

6.3 Cas particulier de la division par d

Puisque a, b, c et d sont des réels positifs, à condition qu'ils ne soient pas nuls, leurs inverses aussi. On déduit donc de la propriété précédente que l'on peut multiplier par l'inverse de l'un des termes s'il est non nul. Ce terme divisé par lui-même devient 1. Conséquemment, toute analogie en puissance p peut se réduire, en divisant tous les termes par l'un d'entre eux, à une analogie de même puissance où l'un des termes est 1.

Par utilisation des huit formes équivalentes de l'analogie (voir 5.3), il est toujours possible de placer le plus grand terme en dernière position en tant que d. Dans ce cas, en divisant par d, on obtient une analogie de même puissance où le dernier terme est 1, et où tous les autres termes sont inférieurs à 1. Tous les termes sont donc dans $]0; 1]$. On a donc l'équivalence suivante, dans le cas où d est supérieur ou égal aux autres termes :

$$a : b ::^p c : d \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{d} : \frac{b}{d} ::^p \frac{c}{d} : 1.$$

7. Nous ne nous servirons pas de ce résultat dans la suite de cet article, mais rappelons que les huit formes équivalentes de l'analogie établissent une correspondance avec le groupe des transformations des coins du carré, c'est-à-dire le groupe diédral, noté D_8.

6.4 Réduction à l'analogie arithmétique

Toute analogie en puissance p, avec p différent de $-\infty$ ou $+\infty$, peut être transposée en analogie arithmétique, c'est-à-dire en puissance 1. La dernière colonne du Tableau 1 suggérait déjà ce résultat en exprimant les moyennes géométrique et harmonique au moyen de la moyenne arithmétique par prise du logarithme ou de l'inverse.

Dans le cas général où $p \neq 0$, en prenant la puissance p des termes d'une analogie, on obtient le résultat voulu. L'équivalence suivante énonce ce fait :

$$a : b ::^p c : d \quad \Leftrightarrow \quad a^p : b^p ::^1 c^p : d^p. \tag{4}$$

Cela est prouvé facilement comme suit :

$$\begin{aligned} a : b ::^p c : d \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(a^p + d^p) = \frac{1}{2}(b^p + c^p) \\ &\Leftrightarrow \quad a^p : b^p ::^1 c^p : d^p. \end{aligned}$$

Une autre manière de faire est d'écrire simplement les équivalences suivantes, en ayant en tête que l'analogie en puissance 1 est l'analogie arithmétique dans laquelle le rapport est la soustraction et la conformité l'égalité :

$$\begin{aligned} a : b ::^p c : d \quad &\Leftrightarrow \quad a^p - b^p = c^p - d^p \\ &\Leftrightarrow \quad a^p : b^p ::^1 c^p : d^p. \end{aligned}$$

Dans le cas où $p = 0$, la transformation à appliquer pour passer de l'analogie géométrique à l'analogie arithmétique est la prise du logarithme, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} a : b ::^0 c : d \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{a \times d} = \sqrt{b \times c} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(\ln a + \ln d) = \frac{1}{2}(\ln b + \ln c) \\ &\Leftrightarrow \quad \ln a : \ln b ::^1 \ln c : \ln p. \end{aligned}$$

La propriété n'est pas valable dans les cas de $-\infty$ et $+\infty$. Il n'y a pas de transformation permettant de passer à une analogie arithmétique à partir de la simple égalité des min ou des max des extrêmes et des moyens.

6.5 Réduction à une forme canonique

En combinant les deux réductions précédentes, pour un quadruplet (a, b, c, d) de nombres positifs non-nuls rangés par ordre croissant, s'il existe une analogie de puissance $p \neq 0$ entre ces nombres, alors on peut réduire cette analogie à la forme canonique suivante :

$$a : b ::^p c : d \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{a}{d}\right)^p : \left(\frac{b}{d}\right)^p ::^1 \left(\frac{c}{d}\right)^p : 1$$

dans laquelle les termes sont rangés comme suit si p est positif :

$$\left(\frac{a}{d}\right)^p \leq \left(\frac{b}{d}\right)^p \leq \left(\frac{c}{d}\right)^p \leq 1,$$

mais comme suit si p est négatif :

$$\left(\frac{a}{d}\right)^p \geq \left(\frac{b}{d}\right)^p \geq \left(\frac{c}{d}\right)^p \geq 1.$$

7 Existence et unicité de p pour un quadruplet quelconque

Nous nous interrogeons à présent sur l'existence d'analogies en p pour un quadruplet donné (a, b, c, d) de nombres réels. Nous supposons ces nombres positifs et non nuls c'est-à-dire dans $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. En plus, et cela est important, nous les supposons rangés dans l'ordre $a < b < c < d$, avec inégalité stricte. Nous allons montrer qu'il existe alors un unique p pour lequel il existe une analogie entre a, b, c et d, c'est-à-dire,

$$a < b < c < d \quad \Rightarrow \quad \exists! p \in \mathbb{R} \;:\; m_p(a, d) = m_p(b, c)$$

autrement dit,

$$\exists! p \in \mathbb{R} \;:\; \lim_{r \to p} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(a^r + d^r)} = \lim_{r \to p} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(b^r + c^r)}. \tag{5}$$

Comme, étant donnés quatre nombre réels différents deux à deux, on peut toujours les ordonner, la proposition précédente s'interprète de la façon suivante :

> Quels que soient quatre nombres réels positifs non nuls, différents deux à deux, on peut toujours voir une analogie entre eux et cette analogie est unique.

On peut paraphraser :

> Il y a toujours un angle, et il est unique, sous lequel on peut voir une analogie entre quatre nombres quelconques (positifs, non nuls, différents deux à deux) à condition de les ordonner par ordre croissant.

7.1 Existence de p

Pour prouver les propositions énoncées ci-dessus, on considère la fonction en p suivante :

$$\delta(p) = \lim_{r \to p} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(a^r + d^r)} - \lim_{r \to p} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(b^r + c^r)}.$$

Cette fonction est simplement la différence entre la partie gauche et la partie droite de l'équation (5).

On établit d'abord que δ est continue. La fonction δ étant la différence de deux fonctions $m_p(a, d)$ et $m_p(b, c)$ toutes deux continues sur $\mathbb{R}$, est continue sur $\mathbb{R}$. En 0, la limite est $\sqrt{ad} - \sqrt{bc}$.

Examinons maintenant les valeurs extrêmes de δ. Considérons le cas où p tend vers $-\infty$. Rappelons que l'on a supposé a, b, c et d ordonnés strictement de façon croissante. La fonction δ tend donc vers la valeur $\min(a, d) - \min(b, c) = a - b$. Maintenant, a étant inférieur à b, la valeur limite en $-\infty$ est négative :

$$\lim_{p \to -\infty} \delta(p) = a - b < 0.$$

Pour le cas où p tend vers $+\infty$, on a le même raisonnement en remplaçant min par max : $\max(a, d) - \max(b, c) = d - c$. La valeur obtenue, $d - c$ est positive parce que $c < d$:

$$\lim_{p \to +\infty} \delta(p) = d - c > 0.$$

Le fait que δ soit continue et comprise entre deux valeurs l'une négative à gauche, l'autre positive à droite, implique par le théorème des valeurs intermédiaires de Cauchy que δ s'annule, autrement dit qu'il existe au moins une valeur de p définissant une analogie entre les quatre termes a, b, c et d.

7.2 Unicité de p

On montre d'abord que s'il y a deux analogies, alors il y en a en réalité trois. Soient donc p et q les abscisses de deux points d'intersection des courbes des moyennes généralisées de a, d et de b, c. Comme a et d encadrent b et c, la courbe pour b, c passe en p sous celle de a, d en venant de $-\infty$ et au dessus en q en venant de $+\infty$. Elle est donc à la fois en dessous et au dessus entre les deux valeurs p et q. Il existe donc une valeur r entre p et q correspondant à un troisième point d'intersection. Soit r est négatif et l'on a deux valeurs négatives p et r ; soit r est positif et l'on a deux valeurs positives r et q. Ci-dessous on montre que chacun de ces deux cas mène à une contradiction.

Supposons qu'il existe deux valeurs $0 < r < q$ telles que l'on ait l'analogie. On se restreint au cas $0 < a < b < c < 1$ en divisant par d grâce au résultat vu en 6.3.

$$a : b ::^r c : 1 \quad \Leftrightarrow \quad b^r + c^r - 1 = a^r$$

$$\begin{aligned}
a : b ::^q c : 1 \quad &\Leftrightarrow \quad b^q + c^q - 1 = a^q \\
&\Leftrightarrow \quad b^q + c^q - 1 = a^r \times a^{q-r} \\
&\Leftrightarrow \quad b^q + c^q - 1 = (b^r + c^r - 1) \times a^{q-r} \\
&\Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{1 - (b^q + c^q)}{1 - (b^r + c^r)}}_{> 1} = \underbrace{a^{q-r}}_{< 1}
\end{aligned}$$

La dernière ligne se justifie de la manière suivante. D'une part $b^q + c^q < b^r + c^r$ car $0 < b < c < 1$ et $0 < r < q$, d'où le rapport supérieur à 1. D'autre part $a^{q-r} < 1$ car $a < 1$ et $q - r > 0$. Cette ligne énonce une contradiction : il ne peut donc exister deux analogies pour le même quadruplet.

Pour deux valeurs négatives $p < r < 0$, la même démonstration vaut en utilisant l'analogie équivalente vue en 6.1 $1/a : 1/b ::^{-p} 1/c : 1/d$.

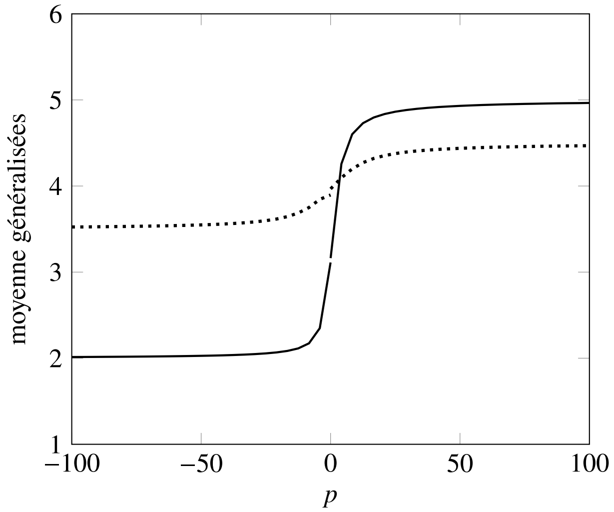

FIGURE 2 – En plein, valeurs des moyennes généralisées de a et d pour $a = 2$ et $d = 5$, avec p en abscisse. En pointillé, même chose avec deux nombres $b = 3{,}5$ et $c = 4{,}5$. La valeur de p telle que l'on ait l'analogie $a : b ::^p c : d$ est donnée par l'intersection des courbes pleine et pointillée. En l'occurrence $p \simeq 3{,}06$.

Pour être complet, comme cas particulier, se demander si $p = 0$ revient seulement à vérifier l'unicité du cas $bc = ad$.

La figure 2 visualise l'unicité de p pour des valeurs particulières de a, b, c et d.

7.3 Calcul de p en pratique

En pratique, le calcul de p pour un quadruplet de nombres positifs peut s'implémenter par recherche dichotomique et p peut être calculé avec une précision fixée à l'avance qui servira de critère d'arrêt. On lancera bien sûr cette recherche dichotomique après s'être assuré que le quadruplet ne correspond pas à un cas particulier de p nul ou infini.

8 Remarques

8.1 Résolution d'analogie

Soient a, b et c des nombres réels positifs non-nuls rangés par ordre croissant et p un nombre réel quelconque, il est trivial qu'il existe une solution unique à l'équation suivante dans le cas où $p \neq 0$:

$$a^p + x^p = b^p + c^p,$$

ou à l'équation suivante correspondant au cas où $p = 0$:

$$\sqrt{a \times x} = \sqrt{b \times c}.$$

Autrement dit, il existe une solution unique à l'équation analogique

$$a : b ::^p c : x.$$

Dans le cas $p = -\infty$ ou $+\infty$, il faut détailler les cas. Dans certains cas, la solution est unique car devant être égale au min ou au max, dans d'autres cas tout nombre supérieur au min ou inférieur au max faisant l'affaire, la solution ne sera pas unique.

Il est clair que la même chose peut être dite pour les cas où l'inconnue n'est pas d mais a ou b ou c.

8.2 Condition à l'existence de p

D'après les huit formes équivalentes de l'analogie, les deux extrêmes sont interchangeables. De même pour les deux moyens. En plus, les moyens et les extrêmes jouent aussi le même rôle par inversion des rapports.

La démonstration de l'existence de p pour le cas où les quatre nombres donnés (différents deux à deux, soulignons) sont ordonnés repose sur la possibilité que les courbes des moyennes généralisées des extrêmes et des moyens s'intersectent. Autrement dit, p existe si et seulement si les extrêmes encadrent les moyens, ou inversement les moyens encadrent les extrêmes.

8.3 Réordonnancement de quatre termes quelconques

Dans les développements donnés dans la sous-section 7.2, nous avons supposé les quatre nombres rangés par ordre croissant. (En fait, comme vu juste au-dessus, nous pouvons nous contenter que les extrêmes encadrent les moyens ou bien l'inverse.) Tout quadruplet n'étant pas forcément ordonné, il faut s'interroger sur les différentes possibilités. Un raisonnement de combinatoire élémentaire (24 possibilités), combiné aux huit formes équivalentes de l'analogie (24 / 8 = 3), montre qu'il n'y a en fait que trois réordonnancements pertinents du point de vue de l'analogie (voir, par exemple [20, p. 119]) :

$$a : b :: c : d \quad \text{ou} \quad a : c :: d : b \quad \text{ou} \quad a : d :: b : c.$$

Ce qui a été dit dans la section 7, à savoir que l'on peut toujours voir une analogie entre quatre nombres, est donc vrai pour un quadruplet quelconque non nécessairement ordonné, à condition de précise quel réordonnancement y est appliqué.

Notons que le cas $a = b = c = d$ est très particulier, car il n'oblige à aucun réordonnancement. Dans ce cas, les 24 différentes écritures sont toutes possibles et équivalentes. Nous poursuivons le traitement de tels cas ci-dessous.

8.4 Cas d'égalité

Avec la remarque ci-dessus, nous venons de rencontrer un cas d'égalité. Nous les étudions maintenant.

Cas d'égalité $b = c$ seulement. Supposons les termes de l'analogie rangés dans l'ordre a, b, c, d. Il est possible que b soit égal à c. C'est l'analogie continue. Dans ce cas, il est clair que, si $a \neq d$ (et a et d tous deux différents de b), p est unique et est donné par l'intersection de la droite horizontale $y = b = c$ avec la courbe des moyennes généralisées de a et d, puisque c'est une fonction continue et strictement croissante.

Cas d'égalité $a = b$ et $c = d$. Dans ce cas, les deux courbes de moyennes généralisées pour a et d et pour b et c se superposent. La puissance pour l'analogie n'est pas unique puisque tout p de $\mathbb{R}$ permet d'écrire l'égalité de la moyenne quelle qu'elle soit. Les valeurs $-\infty$ et $+\infty$ sont, elles aussi, possibles. Il n'y a donc pas unicité de p dans ce cas.

Cas d'égalité $a = d$. Les termes a et d étant les extrêmes, c'est-à-dire les max et les min des termes de l'analogie on a alors nécessairement $a = b = c = d$. Dans ce cas, l'analogie en p est vraie pour tout p dans $]-\infty; +\infty[$ et même pour $p = -\infty$ ou $+\infty$. Il n'y a donc pas unicité de p dans ce cas.

Dans la section 6, nous avions divisé par d, ce qui suppose qu'il soit différent de 0. Si d tend vers 0 et qu'il est le maximum des quatre nombres positifs a, b, c et d, on aura forcément à la limite $a = b = c = d = 0$. Comme vu ci-dessus, l'analogie sera alors vraie pour toute valeur de p, et même pour $p = 0$ en définissant de manière adéquate, par limite, la valeur que l'on attribue à 0^0. Par souci de continuité, on posera à la limite que $0^0 = 0$.

8.5 Cas particulier des booléens

L'analogie entre booléens a été présentée et étudiée dans plusieurs travaux, comme par exemple [28, 10]. Nous établissons ici le lien avec l'analogie en puissance p.

Pour établir le lien entre booléens et nombres réels, nous notons évidemment les valeurs faux et vrai par 0 et 1. Il y a fondamentalement trois analogies possibles entre booléens :

$$0 : 0 :: 0 : 0 \quad \text{ou} \quad 0 : 0 :: 1 : 1 \quad \text{ou} \quad 1 : 1 :: 1 : 1$$

La deuxième analogie peut en particulier être réécrite de façon équivalente en $0 : 1 :: 0 : 1$, ou en $1 : 1 :: 0 : 0$, ou encore en $1 : 0 :: 1 : 0$ grâce aux formes équivalentes.

Les trois analogies fondamentales ci-dessus correspondent au cas $a = b = c = d$ pour la première et la troisième et au cas $a = b$ et $c = d$ pour la deuxième. Il est donc intéressant de noter que dans tous ces cas, de par ce qui a été vu plus haut pour les cas d'égalité, il n'y a pas unicité de p, et toutes les valeurs, y compris les valeurs infinies sont valables.

Mais il est aussi possible d'envisager l'analogie

$$0 : 1 :: 1 : 0$$

qui est équivalente à $1 : 0 :: 0 : 1$ par inversion des rapports (cf. [19] pour une occurrence en pratique de ce cas).

Ces deux formes équivalentes de la même analogie s'expliquent en considérant que le rapport est la négation logique. L'égalité des rapports fait alors leur validité.

Or cette analogie ne constitue pas un prolongement du modèle qui étend les formules d'analogie entre ensembles aux booléens [21] ou encore ne permet pas une justification fondée sur la minimalité de complexité algorithmique [29]. Cette analogie n'entre pas non plus dans le modèle d'analogie en puissance p pour la simple raison que les termes ne sont pas rangés dans un ordre croissant quelles que soient les formes équivalentes considérées.

9 Conclusion et perspectives

Nous avons étudié le lien entre analogie et moyennes, ou plus exactement, moyennes généralisées, et nous nous sommes servis de cette notion comme levier pour généraliser et définir les analogies en puissance p. Les analogies classiques, arithmétique et géométrique, ne sont évidemment que les cas particuliers en $p = 0$ et en $p = 1$ d'analogies en puissance p.

En particulier, nous avons montré que, quels que soient quatre nombres réels positifs, il est toujours possible de voir une analogie entre eux, grâce à un réordonnancement et à une puissance bien choisie unique si les nombres sont différents deux à deux. On peut paraphraser et dire qu'il y a généralement une unique perspective – un réordonnancement et une puissance – sous laquelle on peut voir une analogie entre quatre nombres positifs quelconques.

Pour un problème particulier à traiter, la question se posera de savoir quels sens prennent le réordonnancement nécessaire pour trier les nombres et la valeur numérique de la puissance. Il ne semble pas *a priori* que la valeur de la puissance exprime une force quelconque de l'analogie, mais son interprétation devra sans doute se faire en fonction des données du problème traité.

Nous avons aussi montré que toute analogie peut se réduire (par bijection) à une forme canonique, ce qui donne lieu à une infinité d'analogies équivalentes. En particulier, cela montre que toutes les analogies, y compris les analogies classiques, peuvent être traitées au moyen d'une analogie arithmétique équivalente.

Ce travail ouvre de nouvelles pistes. Tout d'abord nous nous sommes restreints au cas de valeurs positives, et il est naturel de s'interroger sur l'extension à tout les réels pour ouvrir la voie au traitement de représentations comprenant des valeurs négatives. On peut même envisager une extension aux nombres complexes.

Un autre piste, déjà mentionnée ci-dessus, concerne la sémantique du paramètre p qui, d'une certaine façon, résume l'information implicite dans a, b, c et d à leur analogie en p, soit $a : b ::^p c : d$. On peut donc s'interroger sur la possibilité de fusionner l'information contenue dans un quadruplet de nombres par la seule donnée de la puissance de leur analogie.

Remerciements

Les travaux présentés dans cet article sont le fruit d'une collaboration rendue possible par le séjour en sabbatique du premier auteur auprès de l'organisme du second auteur. Les auteurs adressent leurs remerciements à la section pour la promotion de la recherche de l'université Waseda et à la chaire internationale du LORIA pour leurs financements.

Les travaux présentés dans cet article ont aussi bénéficié d'une subvention de recherche de la Société japonaise pour la promotion de la science, de type Kiban C, n° 21K12038, intitulée « Algorithmes théoriquement fondés pour l'extraction automatique de jeux de tests d'analogie en traitement automatique des langues ».

Aussi, ces travaux de recherche ont été partiellement soutenues par le projet ANR *Analogies : from theory to tools and applications* (AT2TA), ANR-22-CE23-0023.

Références

[1] Alsaidi, Safa, Amandine Decker, Puthineath Lay, Esteban Marquer, Pierre Alexandre Murena et Miguel Couceiro: *On the transferability of neural models of morphological analogies*. Dans *Workshop on Advances in Interpretable Machine Learning and Artificial Intelligence (AIMLAI 2021)*, tome 1 de *PKDD/ECML Workshops*, pages 76–89, Bilbao/Virtual, Spain, 2021. https://inria.hal.science/hal-03313591.

[2] Aristote: *Éthique à Nicomaque*. Librairie philosophique J. Vrin, Paris, [1er tirage 1990] édition, 1997. Trad. J. Tricot.

[3] Badra, Fadi et Marie-Jeanne Lesot: *CoAT-APC: When analogical proportion-based classification meets case-based reasoning*. Dans Reuss, Pascal et Jakob Michael Schönborn (rédacteurs): *Workshop Proceedings of the 30th International Conference on Case-Based Reasoning (ICCBR 2022)*, tome 3389 de *CEUR Workshop Proceedings*, pages 43–56, Nancy, France, September 12-15 2022.

[4] Badra, Fadi, Marie Jeanne Lesot, Esteban Marquer et Miguel Couceiro: *Some perspectives on similarity learning for case-based reasoning and analogical transfer*. Dans *Workshop on the Interactions between Analogical Reasoning and Machine Learning (IARML@IJCAI'2023*, tome 3492, pages 16–29, Macao, China, 2023. CEUR-WS.org. https://inria.hal.science/hal-04208969.

[5] Bitton, Yonatan, Ron Yosef, Eliyahu Strugo, Dafna Shahaf, Roy Schwartz et Gabriel Stanovsky: *VASR: visual analogies of situation recognition*. Dans Williams, Brian, Yiling Chen et Jennifer Neville (rédacteurs): *(AAAI 2023) and (IAAI 2023) and (EAAI*

2023), pages 241–249, Washington, DC, USA, February 7-14 2023. AAAI Press.

[6] Chesneau dit Du Marsais, César et Claude Yvon: *Analogie*. Dans *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une société de gens de lettres*. Chez Briasson, David, Le Breton ou Durand, Paris, 1751–1772.

[7] Collins, Brona et Harold Somers: *Recent Advances in Example-Based Machine Translation*, chapitre EBMT seen as case-based reasoning, pages 115–153. Springer Netherlands, Dordrecht, 2003, ISBN 978-94-010-0181-6. `https://doi.org/10.1007/978-94-010-0181-6_4`.

[8] Cornuéjols, A., P. A. Murena et R. Olivier: *Transfer learning by learning projections from target to source*. Dans *IDA 2020*, tome 12080 de *LNCS*, pages 119–131, Springer, 2020.

[9] Couceiro, Miguel, Nicolas Hug, Henri Prade et Gilles Richard: *Analogy-preserving functions: A way to extend boolean samples*. Dans *26th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI 2017)*, pages 1–7, Melbourne, Australia, 2017. `https://inria.hal.science/hal-01668230`.

[10] Couceiro, Miguel, Nicolas Hug, Henri Prade et Gilles Richard: *Analogy-preserving functions: A way to extend boolean samples.* Dans *Proceedings of the 26th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI 2017)*, pages 1575–1781, Melbourne, Australia, August 2017.

[11] Couceiro, Miguel et Erkko Lehtonen: *Galois theory for analogical classifiers*. Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, 2023. `https://inria.hal.science/hal-03665625`.

[12] Euclide: *Les quinze livres des éléments géométriques d'Euclide : plus le livre des donnez. . .trad. en françois*. I. Dédin, Paris, 1632.

[13] Fahandar, Mohsen Ahmadi et Eyke Hüllermeier: *Learning to rank based on analogical reasoning*. Dans *AAAI-18*, pages 2951–2958, 2018.

[14] Fahandar, Mohsen Ahmadi et Eyke Hüllermeier: *Analogical embedding for analogy-based learning to rank*. Dans *IDA 2021*, tome 12695 de *LNCS*, pages 76–88, Springer, 2021.

[15] Gentner, Derdre: *Structure mapping: A theoretical model for analogy*. Cognitive Science, 7(2):155–170, 1983.

[16] Hölder, Otto Ludwig: *Ueber einen Mittelwerthssatz*. Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaft zu Göttingen und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen, 1889(2):38–47, Jan 1889.

[17] Hüllermeier, Eyke: *Towards analogy-based explanations in machine learning*. Dans *MDAI 2020*, tome 12256 de *LNCS*, pages 205–217, Springer, 2020.

[18] Keane, Mark T. et Barry Smyth: *Good counterfactuals and where to find them: A case-based technique for generating counterfactuals for explainable AI (XAI)*. Dans *ICCBR 2020*, tome 12311 de *LNCS*, pages 163–178, Springer, 2020.

[19] Klein, Sheldon: *Culture, mysticism and social structure and the calculation of behavior*. Dans *Proceedings of the European Conference on Artificial Intelligence (ECAI 1982)*, pages 141–146, 1982.

[20] Lepage, Yves: *De l'analogie rendant compte de l'analogie en linguistique*. Mémoire d'abilitation à diriger les recherches, Université Joseph Fourier, Grenoble, mai 2003. `https://theses.hal.science/tel-00004372`.

[21] Lepage, Yves: *Formulae for the solution of an analogical equation between Booleans using the Sheffer stroke (NAND) or the Pierce arrow (NOR)*. Dans Couceiro, Miguel, Pierre Alexandre Murena et Stergos Afantenos (rédacteurs): *Proceedings of the Workshop Interactions between analogies and machine learning, colocated with IJCAI 2023 (IARML@IJCAI 2023)*, pages 3–14, August 2023. `https://ceur-ws.org/Vol-3492/paper1.pdf`.

[22] Lieber, Jean, Emmanuel Nauer et Henri Prade: *When revision-based case adaptation meets analogical extrapolation*. Dans *ICCBR 2021*, tome 12877 de *LNCS*, pages 156–170, Springer, 2021.

[23] Michel, Paul Henri: *Les médiétés*. Revue d'histoire des sciences et de leurs applications, 2(2) :139–178, 1949.

[24] Mitchell, Melanie: *Abstraction and analogy-making in artificial intelligence*. CoRR, abs/2102.10717, 2021. `https://arxiv.org/abs/2102.10717`.

[25] Murena, Pierre Alexandre, Marie Al-Ghossein, Jean Louis Dessalles et Antoine Cornuéjols: *Solving analogies on words based on minimal complexity transformation*. Dans Bessière, Christian (rédacteur): *Proceedings of the Twenty-Ninth International Joint Conference on Artificial Intelligence, IJCAI-20*, pages 1848–1854, juillet 2020. `https://doi.org/10.24963/ijcai.2020/256`, Main track.

[26] Nagao, Makoto: *A framework of a mechanical translation between Japanese and English by analogy principle*. Dans Elithorn, Alick et Ranan Banerji (rédacteurs): *Proceedings of the international NATO symposium on Artificial and human intelligence*, pages 173–180. Elsevier Science Publishers, NATO, 1984. `http://www.mt-archive.info/Nagao-1984.pdf`.

[27] Peyre, Julia, Ivan Laptev, Cordelia Schmid et Josef Sivic: *Detecting unseen visual relations using analogies*. Dans *IEEE ICCV 2019*, pages 1981–1990, 2019.

[28] Prade, Henri et Gilles Richard: *Analogical proportions and analogical reasoning - an introduction*. Dans Aha, David W. et Jean Lieber (rédacteurs): *Case-Based Reasoning Research and Development*, pages 16–32, Cham, 2017. Springer International Publishing, ISBN 978-3-319-61030-6.

[29] Prade, Henri et Gilles Richard: *Boolean analogical proportions - axiomatics and algorithmic complexity issues*. Dans Antonucci, Alessandro, Laurence Cholvy et Odile Papini (rédacteurs): *Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty*, pages 10–21, Cham, 2017. Springer International Publishing, ISBN 978-3-319-61581-3.

[30] Rallier des Ourmes, Jean Joseph: *Proportion*. Dans *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une société de gens de lettres*. Chez Briasson, David, Le Breton ou Durand, Paris, 1751–1772.

[31] Sadeghi, Fereshteh, C. Lawrence Zitnick et Ali Farhadi: *Visalogy: Answering visual analogy questions*. Dans *NIPS 2015*, pages 1882–1890, 2015.

[32] Turney, Peter D.: *Similarity of semantic relations*. Computational Linguistics, 32(2):379–416, 2006.

[33] Vitrac, Bernard: *La Définition V. 8 des Eléments d'Euclide.* Centaurus, 38(2–3) :97–121, 1996.

[34] Zervakis, Georgios, Emmanuel Vincent, Miguel Couceiro, Marc Schoenauer et Esteban Marquer: *An analogy based approach for solving target sense verification*. Dans *Proceedings of the 6th International Conference on Natural Language Processing and Information Retrieval (NLPIR 2022)*, pages 144–151, Bangkok, Thailand, December 16–18 2022. ACM. `https://doi.org/10.1145/3582768.3582794`.